

COUETTE-STRÖMUNG THIXOTROPER SUBSTANZEN BEI VIBRATION*

O. WEIN, P. MITSCHKA und K. WICHTERLE

*Institut für theoretische Grundlagen der chemischen Technik,
Tschechoslowakische Akademie der Wissenschaften, 165 02 Prag-Suchdol*

Eingegangen am 7. Januar 1974

Untersucht wird das mathematische Modell der Couette-Strömung thixotroper Substanzen unter gleichzeitigem verflüssigenden Einfluß von Vibrationen. Die Lösung des mathematischen Modells einer solchen Strömung für eine Viskositätsfunktion vom Potenztyp wurde zur Auswertung der Abhängigkeit des Dissipationsparameters W_0 von der Amplitude a_0 und der Frequenz f_0 der Vibrationen ausgenützt.

In den vorausgegangenen Arbeiten^{1,2} untersuchten wir die einfache Scher- und Poiseuille-Strömung thixotroper Materialien, deren (veränderliche) Viskosität η sowohl von den Bedingungen der Makroströmung, wie auch den Kenngrößen eines hydrodynamischen Rauschens (z.B. Vibrationen, Turbulenz u.ä.), für ein gegebenes Material durch den Dissipationsparameter W_N charakterisiert, abhängig ist.

Für den Fall einer viskometrischen Makroströmung³, bei der in jedem Punkt des Materials $\tau = |\tau_{12}| = \text{const.}$, $D = |dv_1/dx_2| = \text{const.}$ und $W_N = W_0 = \text{const.}$ gilt, wird in dem in Vorschlag gebrachten¹ rheologischen Modell die Abhängigkeit $\eta = \tau/D$ von den Strömungsbedingungen, z.B. von τ und W_0 , implizit wie folgt

$$\eta = \eta_W[W], \quad W = W_0 + \tau^2/\eta \quad (1), (2)$$

ausgedrückt. Die Form der Materialfunktion $\eta_W[W]$ wird eindeutig durch die Forderung festgelegt, daß sie in Situationen ohne Vibration ($W_0 = 0$) die Abhängigkeit zwischen η und τ in der gleichen Form wiedergeben muß wie jede andere übliche Viskositätsfunktion für viskometrische Strömungen. Sei eine solche Viskositätsfunktion in der Form $\eta = \eta_\tau[\tau]$ gegeben. Die verallgemeinerte (generalisierte) Viskositätsfunktion η_V , die den Einfluß der Vibrationen in Übereinstimmung mit den Relationen (1) und (2) widerspiegelt, kann statt in der Form (1) vorteilhafter wie folgt

$$\eta = \eta_V[\tau, W_0] \equiv \eta_\tau[T(\tau, W_0)] \quad (3)$$

formuliert werden. T ist hier ein für ein gegebenes τ und W_0 durch die Beziehung $T \equiv (W\eta)^{1/2}$

* III. Mitteilung in der Reihe Strömung thixotroper Substanzen bei Vibration; II. Mitteilung: diese Zeitschrift 39, 2380 (1974).

definierter¹ Parameter, d.h. die Wurzel der Gleichung

$$T^2 - W_0 \eta_\tau[T] = \tau^2. \quad (4)$$

Dieses Verfahren der Konstruktion der Abhängigkeit $\eta_v[\tau, W_0]$ für $W_0 = \text{const.}$ ist vor allem für die Lösung solcher hydrodynamischer Aufgaben vorteilhaft, in denen im vornherein die Felder $W_0(\vec{r})$ und $\tau(\vec{r})$ bekannt sind. Zu dieser Kategorie von Aufgaben zählt auch die Couette-Strömung bei $W_0 = \text{const.}$

MODELL DER STRÖMUNG

Die geometrische Anordnung der analysierten Couette-Strömung ergibt sich aus der Abb. 1. Ohne die Allgemeinheit der Lösung zu beeinträchtigen kann angenommen werden, daß die äußere Zylinderfläche unbeweglich ist, d.h. daß $\omega(r) = 0$ für $r = R/\kappa$, $\kappa < 1$, gilt und daß die innere Zylinderfläche um die gemeinsame Achse, $r = 0$, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω rotiert, d.h. daß $\omega(r) = \Omega > 0$ für $r = R$ gilt. Die Verteilung der Scherspannungen kann ausgehend von den (vereinfachten) Bewegungsgleichungen in der Form³

$$\tau = \tau_w (R/r)^2, \quad \tau_w \equiv (M/L)/(2\pi R^2) > 0 \quad (5), (6)$$

ausgedrückt werden. Die Schergeschwindigkeit ergibt sich dann³ zu

$$D = |D_{r\phi}| = -r(d\omega/dr) \geq 0. \quad (7)$$

Die Beziehung zwischen τ und D kann in der Form³

$$D = \tau/\eta_\tau[T] \quad (8)$$

ausgedrückt werden, die Beziehung zwischen Ω , τ_w , κ und W_0 für eine vorgegebene Viskositätsfunktion η_τ dann wie

$$\Omega = 1/2 \int_{\kappa^2 \tau_w}^{\tau_w} (1/\eta_\tau[T]) d\tau. \quad (9)$$

Für rheometrische Zwecke ist es von Vorteil auch die Schergeschwindigkeiten D_w , D_2 an der inneren und äußeren Zylinderwand

$$D_w = \tau_w/\eta_\tau[T_w], \quad D_2 = \kappa^2 \tau_w/\eta_\tau[T_2] \quad (10a,b)$$

zu kennen; T_w und T_2 in (10a,b) sind gemäß der Gl. (4) und (8) die Wurzeln der Gleichungen

$$T_w^2 - W_0 \eta_\tau[T_w] = \tau_w^2, \quad T_2^2 - W_0 \eta_\tau[T_2] = \kappa^4 \tau_w^2. \quad (11a,b)$$

Allgemeine Lösung

Die Gl. (3), (4), (9)–(11) werden zunächst in dimensionslose Form transformiert. Die Viskositätsfunktion $\eta_\tau[T]$ kann in die dimensionslose Viskositätsfunktion $M[\Theta^*]$ überführt werden⁴:

$$\Theta^* \equiv T/\tau_1, \quad M[\Theta^*] \equiv (1/\eta_1) \eta_\tau[\Theta^* \tau_1]. \quad (12), (13)$$

Durch Einführung des dimensionslosen Dissipationsparameters E und der dimensionslosen Schubspannung ϑ^* in die Beziehung (4) resultiert vorerst ganz allgemein

$$(\Theta^*)^2 - E M[\Theta^*] = (\vartheta^*)^2 \quad (14)$$

und speziell auch

$$(\Theta_w^*)^2 - E M[\Theta_w^*] = A^2, \quad (\Theta_2^*)^2 - E M[\Theta_2^*] = \kappa^4 A^2. \quad (15a, b)$$

Die dimensionslosen Äquivalente der gesuchten kinematischen Parameter D_w, D_2, Ω können dann wie folgt formuliert werden:

$$v_w^* = A/M[\Theta_w^*], \quad v_2^* = \kappa^2 A/M[\Theta_2^*], \quad (16a, b)$$

$$B = 1/2 \int_{\kappa^2 A}^A (1/M[\Theta^*(\vartheta^*, E)]) d\vartheta^*. \quad (17)$$

Hierbei ist $\Theta^*(\vartheta^*, E)$ durch die Beziehung (14) definiert.

Für die Gegenüberstellung des Modells mit den experimentell angesammelten Daten, die in der Regel als Abhängigkeiten zwischen Ω und τ_w für vorgegebene Vibrationsbedingungen und für eine bestimmte geometrische Anordnung des Rotationsviskosimeters vorliegen, ist es von Vorteil aus der Lösung des mathematischen Modells in der Form $B = B(A)$ für fixierte Werte von E und κ auszugehen. Hierfür wäre es jedoch nötig für jeden Wert von A gesondert eine numerische Quadratur gemäß (17), auf der numerisch invertierten Funktion $\vartheta^*(\Theta^*, E)$ gemäß (14), durchzuführen. Zwecks Bestimmung des Verlaufes der Funktion $B(A)$ ist es vorteilhafter die Differentialgleichung

$$\frac{dB}{dA} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M[\Theta_w^*(A, E)]} - \frac{1}{M[\Theta_2^*(A, E, \kappa)]} \right) \quad (18)$$

mit der Anfangsbedingung $B = 0$ für $A = 0$ zu lösen, wobei die rechte Seite gemäß (15a, b) berechnet wird.

Lösung für das Potenzmodell

Aus den bereits in der vorausgegangenen Arbeit² angeführten Gründen werden wir uns im weiteren lediglich für die Lösung der gestellten Aufgabe für das Potenzmodell einer Viskositätsfunktion

$$\eta_i[T] \equiv K^m T^{1-m}, \quad (19)$$

interessieren. Dimensionslos geschrieben ist das Potenzmodell

$$M[\Theta] \equiv \Theta^{1-m}. \quad (20)$$

Die Automorphie des Potenzmodells⁴, d.h. seine Funktional-Eigenschaft $M[c\Theta^*] = M[c] \cdot M[\Theta^*]$, deren Konsequenz auch die Bindung zwischen den allgemein einführbaren dimensionsbehafteten Parametern τ_1, η_1 in der Form $\eta_1 \tau_1^{m-1} = K^m$ ist, können wir zur Herabsetzung der Anzahl der unabhängigen Parameter des Modells ausnützen. Dies ist durch die Tatsache bedingt, daß die den unabhä-

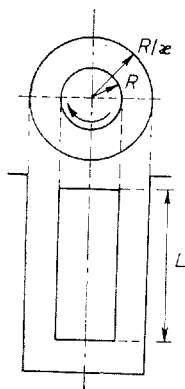


ABB. 1

Schema der Anordnung einer Couette-Strömung

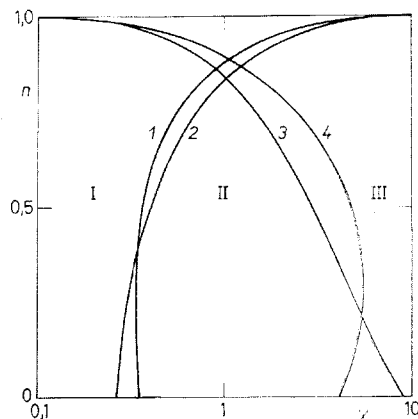


ABB. 2

Grenzen der Anwendbarkeit der annähernden Beziehungen (Genauigkeit besser als 5%)

I Bereich der Anwendbarkeit der Beziehung (28), III Bereich der Anwendbarkeit der Beziehung (29), II Bereich, für den die numerische Lösung herangezogen werden muß. 1, 3 Grenzen der einzelnen Gebiete für $\alpha = 0,1$, 2, 4 Grenzen der einzelnen Gebiete für $\alpha = 0,9$.

gen Parameter E enthaltende Beziehung (14) für das Potenzmodell in eine Form transformiert werden kann, in der E explizit nicht auftritt:

$$\Theta^2 - \Theta^{1-m} = \vartheta^2, \quad (21)$$

und dies durch Einführung neuer dimensionsloser Veränderlichen Θ, ϑ :

$$\Theta \equiv \Theta^* E^{-[1/(1+m)]} = T/T_0; \quad \vartheta \equiv \vartheta^* E^{-[1/(1+m)]} = \tau/\tau_0. \quad (22a,b)$$

Der Normierungsparameter T_0 ,

$$T_0 \equiv W_0^{[1/(1+m)]} \cdot K^{[m/(1+m)]} \quad (23)$$

gibt den Wert der Schubspannung $\tau = T_0$ an, für den $\eta_v[T_0, 0] = \eta_v[0, W_0]$ gilt

In analoger Weise können auch die abhängigen Veränderlichen, die kinematischen Parameter Ω^* , v_2 , v_w , eingeführt werden, uzw. in Abhängigkeit von $P \equiv \tau_w/T_0$, κ und n :

$$\Omega^* \equiv 1/2 \int_{\kappa^2 P}^P \Theta^{m-1} d\vartheta, \quad v = \vartheta \Theta^{m-1}. \quad (24), (25)$$

Hier ist $v = v_w$ bzw. v_2 für $\vartheta = P$ bzw. $\kappa^2 P$, d. h. für Θ_w bzw. Θ_2 , die die Wurzeln der Gleichungen

$$\Theta_w^2 - \Theta_w^{1-m} = P^2, \quad \Theta_2^2 - \Theta_2^{1-m} = \kappa^4 P^2 \quad (26a,b)$$

darstellen.

Für die Berechnung von $\Omega^*(P, \kappa, n)$ ist es wiederum vorteilhafter als die Quadratur gemäß (24) zu berechnen, die Differentialgleichung

$$d\Omega^*/dP = 1/2(\Theta_w^{m-1} - \kappa^2 \Theta_2^{m-1}) \quad (27)$$

zu lösen.

Im Hinblick auf die Singularität im Punkt $P = 0$, $\Omega^* = 0$ ist es unumgänglich nötig zwecks Auffindung nichttrivialer Lösung bei der Vorgabe von Anfangsbedingungen aus den asymptotischen Lösungen für $P \rightarrow 0$

$$\Omega^* \approx \frac{1 - \kappa^2}{2} P + \frac{1 - \kappa^6}{6} \cdot \frac{m-1}{m+1} P^3 + \frac{(1 - \kappa^{10})}{10} \cdot \frac{(m-1)(m^2-6)}{(m+1)^2} P^5 + \dots, \quad (28)$$

bzw. für $\kappa^2 P \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Omega^* \approx & \frac{1 - \kappa^{2m}}{2m} P^m + \frac{(m-1)(\kappa^{-2} - 1)}{4} P^{-1} + \\ & + \frac{(m-1)(m-2)(\kappa^{-2m-4} - 1)}{32(m+2)} P^{-2-m} + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

auszugehen. Für den Fall $P \rightarrow \infty$, $\kappa^2 \rightarrow 0$ kann ein annähernder Ausdruck für den Verlauf von $\Omega^*(P, m)$, $\kappa = 0$, in der Form

$$\Omega^* \approx \frac{P^m - 1}{2m} + \frac{3m^2 + 8m + 1}{12(m+1)} + \varepsilon \quad (30)$$

hergeleitet werden; ε ist hier der Fehler, der für $\kappa = 0$ kleiner als $m/4P$ ist.

ERGEBNISSE

Der Verlauf der Funktion $P = P(\Omega^*, n, \kappa)$ wurde durch numerische Integration der Differentialgleichung (27) mit der für $P = 0,05$ aus der Gl. (28) bestimmten Anfangsbedingung berechnet, und dies für eine Reihe von Kombinationen der Werte $0,1 \leq n \leq 0,9$ und $0,1 \leq \kappa \leq 0,9$. Die Grenzen der Anwendbarkeit der approximativen Formeln (28)–(30) ergeben sich – für eine Genauigkeit von 5% – aus der Abb. 2. Zur graphischen Wiedergabe der Abhängigkeiten $P = P(\Omega^*, n, \kappa)$ führten wir neue dimensionslose Veränderlichen

$$X \equiv \left[\frac{1 - \kappa^{2m}}{m(1 - \kappa^2)} \right]^{[m/(m-1)]} \cdot \frac{2m}{1 - \kappa^{2m}} \cdot \Omega^*, \quad (31)$$

$$Y \equiv \left[\frac{1 - \kappa^{2m}}{m(1 - \kappa^2)} \right]^{[1/(m-1)]} \cdot P, \quad (32)$$

mit dem Bestreben ein, bei einem vorgegebenen n für beliebige κ eine Übereinstimmung der asymptotischen Verläufe für $X \rightarrow 0$ und $X \rightarrow \infty$ zu erzielen. Überraschend war die Feststellung, daß sich die Verläufe $Y(X, \kappa)$ für alle $0 \leq \kappa \leq 1$ – bis auf Unterschiede von maximal 5 Rel.-% – voneinander praktisch nicht unterscheiden.

Da sich die Strömungsanordnung für $\kappa \rightarrow 1$ nach und nach den Bedingungen der einfachen Scherströmung nähert, für die eine algebraische Lösung der analogen Aufgabe¹ in der parametrischen Form

$$X = \Theta^m(1 - \Theta^{-(1+m)})^{1/2}, \quad Y = \Theta(1 - \Theta^{-(1+m)})^{1/2}, \quad (33a,b)$$

zutritt, kann gefolgert werden, daß die gesuchte Lösung mit befriedigender Genauigkeit auch ohne eine numerische Integration konstruiert werden kann. Die Verläufe der Funktionen $P(\Omega^*, n, \varkappa)$ in den reduzierten Veränderlichen X, Y zeigt die Abb. 3.

Ausnützung des Modells für die Bearbeitung von Experimentaldaten

Ziel der Auswertung von rheometrischen Daten, die unter gewissen Vibrationsbedingungen, d.h. bei einer vorgegebenen Amplitude und Frequenz angesammelt wurden, ist die Bestimmung des Wertes des (Dissipations-)Parameters $W_0 = W_0(a, f_0)$, dessen Bedeutung im untersuchten rheologischen Modell durch die Beziehungen (1) und (2) definiert ist. Eine jede Auswertung von Daten betreffend die Couette-Strömung für einen bekannten Verlauf der Viskositätsfunktion $\eta_\tau[\tau]$ basiert im allgemeinen auf dem mathematischen Modell, d.h. den Gleichungen (4)

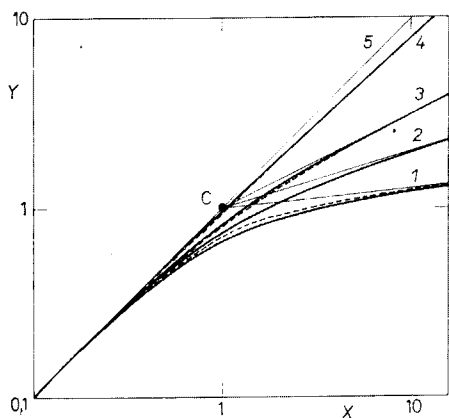


ABB. 3

Ergebnisse der numerischen Lösung

X und Y sind durch die Gl. (31), (32) definiert. Die vollen Linien 1, 2, 3, 4 sind die exakten Lösungen für $n = 0,1, 0,3, 0,5$ und $0,9$; die gestrichelten Linien repräsentieren die annähernden Lösungen gemäß der Beziehung (33a), (33b). Die Gerade 5 ist die Lösung für $n = 1$ (Newtonsche Flüssigkeit). Der Punkt C mit den Koordinaten $X = 1$ und $Y = 1$ ist der Schnittpunkt der Kurven $Y = X$ und $Y = X^n$.

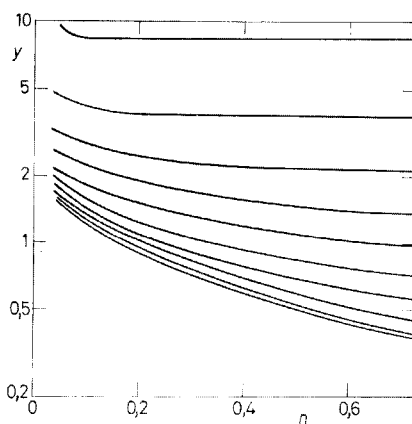


ABB. 4

Verlauf der Funktion $y(m, \varkappa)$ gemäß der Gl. (35), ($n = 1/m$)

Die Werte von \varkappa sind für einzelnen Kurven (von oben nach unten): $0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0$.

und (9), das, für ein vorgegebenes $\eta_i[\tau]$ und κ , eine Regressionsfunktion $\Omega = \Omega(\tau_w, W_0)$ mit einem einzigen Parameter darstellt.

Im Hinblick auf die Streuung der Daten (Ω, τ_w) , die bei der Rheometrie konzentrierter Suspensionen ziemlich groß sein kann (für ein fest eingestelltes Ω ist die Reproduzierbarkeit von τ_w nur in Ausnahmefällen besser als $\pm 10\%$), scheint die Durchführung einer Regressionanalyse zwecks Bestimmung des Parameters W_0 nicht zielgerecht zu sein. Deshalb werden wir im nachfolgenden einen graphisch-numerischen Vorgang der Bestimmung von W_0 aus Angaben über die Couette-Strömung bei Vibration beschreiben, der freilich auf der Annahme basiert, daß im vermessenen Bereich der Viskositäten der Verlauf der Viskositätsfunktion $\eta_v[\tau, W_0]$ durch einen Potenzansatz (4) und (19) erfaßt werden kann.

Aus dem Verlauf der normierten Abhängigkeit $\Omega(\tau_w)$ in der Form $Y(X)$ auf der Abb. 3 ist ersichtlich, daß der Verlauf der Abhängigkeit $Y(X)$ außerhalb des verhältnismäßig engen Bereichs $0,5 < X < 2$ mit genügender Genauigkeit durch die asymptotischen Relationen $Y = X$, für $X < 0,5$, und $Y = X^{1/m}$, für $X > 2$, wiedergegeben werden kann. Aus den (Ω, τ_w) -Daten, die in den Bereich des überwiegenden Einflusses der Vibrationen fallen, wo $Y = X$ gilt, können durch Vergleich mit dem Verlauf des Pseudorheogramms bei vernachlässigbar kleinem Einfluß der Vibration (ermittelt z. B. aus Daten ohne Vibration) die Koordinaten Ω_0, τ_0 des Punktes C bestimmt werden, in dem sich die asymptotischen Äste, $\tau_w \sim \Omega$, und $\tau_w \sim \Omega^{1/m}$ (d.h. zwei Geraden in doppeltlogarithmischer Auftragung) schneiden. Diesem Punkt entsprechen im dimensionslosen Modell offensichtlich die Koordinaten $X = 1$ und $Y = 1$. Aus den Definitionen der Parameter X und Y , Gl. (31), (32), in denen auf den rechten Seiten $\Omega = \Omega_0, \tau_w = \tau_0$ auftritt, kann für den Wert von W_0 die Beziehung

$$W_0 = \tau_0 \Omega_0 y(m, \kappa) \quad (34)$$

hergeleitet werden, in der $y(m, \kappa)$ gemäß (31), (32) durch die Beziehung (s. auch Abb. 4)

$$y(m, \kappa) \equiv \frac{2m}{1 - \kappa^{2m}} \left[\frac{1 - \kappa^{2m}}{m(1 - \kappa^2)} \right]^{(m+1)/(m-1)} \quad (35)$$

gegeben ist.

Die Abb. 5 zeigt einen Satz von Experimentaldaten⁶, die aus rheometrischen Messungen in einem Rotationsviskosimeter mit vibrierender Hülse⁵ stammen. Das verwendete Viskosimeter ($L = 10,86$ cm, $R = 2,56$ cm, $\kappa = 0,719$) ermöglichte, bei einem ohne Vibration rotierenden Innenzylinder, die äußere zylinderförmige Hülse in horizontale (quer zur Zylinderachse) oder vertikale (koaxial mit der Zylinderachse) Vibrationen zu versetzen. Die Messungen wurden bei drei Niveaus der Vibrationsfrequenz und zwei Niveaus der Amplitude verwirklicht. Getestet wurde eine mit organischen Substanzen, vor allen aromatischen Sulfonaten, verschmutzte Gips-suspension mit kritischer Konzentration der festen Phase (aus den Proben trennte sich schon keine Mutterlauge ab); die Größe der Gipskristalle lag vorwiegend im Bereich von $5 \cdot 10^{-5}$ bis $2 \cdot 10^{-4}$ cm. Aus der Abb. 5 ist ersichtlich, daß im vermessenen Bereich der Viskositäten, d.h. ungefähr zwischen den Kurven $B_1 - B_5$, der Verlauf der Viskositätsfunktion η_τ (Gerade A) gut durch eine Potenzfunktion mit $n = 0,36$ approximiert werden kann. Der gestrichelte Bereich auf der Abb. 5 zeigt dann die Streuung der primären viskosimetrischen Daten (ohne Vibration). Im Rahmen dieser Streuung gehen die einzelnen Äste $B_1 - B_5$ bei genügend hohen Werten von Ω

allmählich in die Kurve A über, die dem Verlauf der Viskositätsfunktion ohne Vibrationen entspricht.

Die die einzelnen Meßserien $\tau_w(\Omega)$ charakterisierenden Parameter sind in der Tabelle I zusammengestellt. Die Punkte $C_1 - C_5$ in der Abb. 5 entsprechen den Schnittpunkten der asymptotischen Verläufe; ihre Koordinaten Ω_0, τ_0 zeigt die Tabelle I, zusammen mit den Werten des Dissipationsparameters W_0 , die aus der Gl. (34) für $\alpha = 0,791$ berechnet wurden.

DISKUSSION

Im Rahmen der Streuung der experimentellen Daten können die vermessenen Verläufe $\tau_w(\Omega)$ durch das in Vorschlag gebrachte mathematische Modell mit einer sich

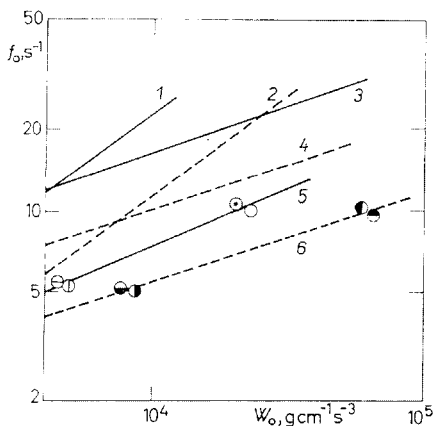
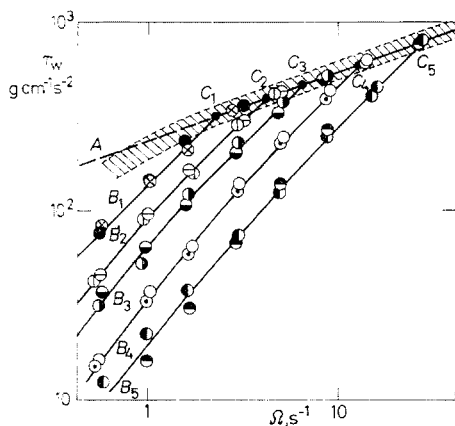


ABB. 5

Gemessene Abhängigkeiten⁶ der Schubspannung von der Schergeschwindigkeit, Amplitude und Frequenz der Vibrationen, (Rotationsrheometrie mit vibrierender Hülse). Das schraffierte Gebiet bezeichnet die Streuung der rheometrischen Daten ohne Vibration

A Ergebnisse der Rotationsrheometrie im Bereich eines vernachlässigbaren Einflusses der Vibrationen; B1—B5 Ergebnisse der Rotationsrheometrie im Bereich des überwiegenden Einflusses der Vibrationen; die Punkte C1—C5 mit den Koordinaten (τ_0, Ω_0) , sind die Schnittpunkte der Kurven B1—B5 mit der Kurve A. ● Versuch 1 (Tab. I), ⊙ 2, ⊕ 5, ⊖ 6, ⊗ 7, ⊙ 8, ○ 9, ⊙ 10, ⊙ 11, ⊙ 12.

ABB. 6

Abhängigkeit des Dissipationsparameters W_0 von der Amplitude a_0 und der Frequenz f_0 der Vibrationen

Bezeichnung der Experimentalpunkte wie in Abb. 5. 1, 2 Schätzung gemäß der Gl. (40), 3, 4 Schätzung gemäß der Gl. (36), 5, 6 Experimentaldaten, 1, 3, 5 für $a_0 = 0,2$ cm, 2, 4, 6 für $a_0 = 0,4$ cm.

nach einem Potenzansatz richtenden Viskositätsfunktion wiedergegeben werden. Die Daten stehen in Übereinstimmung mit den fundamentalen Voraussetzungen: der Parameter W_0 steigt mit steigender Amplitude, wie auch mit steigender Frequenz an. Als beachtenswert ist die Tatsache zu erwähnen, daß der verflüssigende Einfluß der Vibrationen der gleiche sowohl bei Quer-, wie auch koaxialen Vibrationen der Viskosimeterhülse ist, und dies im gesamten Bereich der veränderlichen Vibrationsparameter, wie auch der benutzen Schergeschwindigkeiten. Wir sind der Überzeugung, daß diese Tatsache beweist, daß die richtungsorientierten Schwingungen der Hülse sich schon in geringer Entfernung von der Wand in nichtgeordnete zufällige Bewegungen umsetzen, die in erster Näherung durch einen einzigen skalaren Parameter W_0 charakterisiert werden können.

Vom phänomenologischen Standpunkt könnte somit die Abhängigkeit $W_0 = W_0(f_0, a_0)$ als Stofffunktion interpretiert werden. Wir wollen zwei extreme Zutritte zur Interpretation des Verlaufes der Funktion $W_0(a_0, f_0)$ aufzeigen, die – obwohl sie keinesfalls eine physikalische Theorie der Erscheinung sein wollen – doch qualitativ den möglichen Mechanismen der Verflüssigung erfassen.

Auf Grund von Überlegungen betreffend die mechanische Energie der Längsvibrationen einer Flüssigkeit der Dichte ρ wurde in der Arbeit⁵ ein Schätzwert für W_0

$$W_0 = \rho(2\pi)^2 a_0^2 f_0^3 \quad (36)$$

abgeleitet.

Betrachten wir nun eine Scherbewegung³ mit zwei gegenseitig orthogonalen Scherkomponenten, $D_{12} = \text{const.}$, $D_{23}(t) = D_V \sin(2\pi f_0 \cdot t)$, wo

$$D_V = (2\pi f_0 a_0)/h \quad (37)$$

TABELLE I

Übersicht der Experimente und deren Auswertung

Versuch	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Vibrationen ^a	V	H	V	H	V	H	V	H	V	H	V	H
f_0, s^{-1}	3,0	2,9	3,1	2,9	4,9	5,0	5,0	4,9	10,0	9,7	10,1	9,4
a_0, cm	0,2	0,2	0,4	0,4	0,2	0,2	0,4	0,4	0,2	0,2	0,4	0,4
Ω_0, s^{-1}	2,2	2,2	2,2	2,2	4,3	4,3	6,2	6,2	13	13	28	28
$\tau_0 \cdot 10^{-2}, \text{g cm}^{-1} \text{s}^{-2}$	3,2	3,2	3,2	3,2	4,0	4,0	4,6	4,6	6,0	6,0	8,0	8,0
$W_0 \cdot 10^{-3}, \text{g cm}^{-1} \text{s}^{-3}$	1,8	1,8	1,8	1,8	4,4	4,4	7,3	7,3	20	20	57	57

^a H die Hülse vibriert horizontal (quer zur Rotationsachse des Zylinders); V die Hülse vibriert vertikal.

gilt. Für $D_V \gg D_{12}$ ist die scheinbare Viskosität $\eta(t)$ der Flüssigkeit unabhängig von D_{12} , $\eta(t) = \eta[D_{23}(t)]$; für ein Potenzmodell gilt somit

$$\eta(t) = K |D_{23}(t)|^{n-1}. \quad (38)$$

Bei den Messungen verfolgen wir allerdings nur die Beziehung $\bar{D}_{12} = (1/\bar{\eta}) \bar{\tau}_{12}$ zwischen den zeitlich gemittelten Größen, $\bar{\tau}_{12}$, \bar{D}_{12} , wo gemäß (38)

$$1/\bar{\eta} \equiv \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \frac{1}{\eta(t)} dt = \frac{D_V^{1-n}}{K} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{1-n}(x) dx \quad (39)$$

gilt. Gemäß der Gl. (19), (23), (37) und (38) ist somit der Wert von W_0 durch

$$W_0 = K \left(\frac{2\pi f_0 a_0}{h} \right)^{1+n} \left(\frac{\Gamma((2-n)/2)}{\pi^{1/2} \Gamma((3-n)/2)} \right)^{(1+n)/(1-n)} \quad (40)$$

gegeben, mit Γ für die Gamma-Funktion, $\Gamma(x) = (x-1)!$

In der Abb. 6 sind die Daten $W_0(f_0, a_0)$ aus der Tabelle I mit dem Verlauf der qualitativen Schätzungen gemäß der Gl. (36) und (40) verglichen, wobei $h = R(1/\chi - 1)$. Aus der Abb. 6 ist ersichtlich, daß beide Beziehungen in dem vermuteten Bereich von a_0 und f_0 zu größenordnungsrichtigen Werten für W_0 führen, wie auch die Trends seiner Abhängigkeit von f_0 und a_0 wiedergeben. Ausgehend von den präsentierten Daten wäre es aber selbstverständlich vorzeitig welcherlei weitere Schlußfolgerungen ziehen zu wollen. Erwähnenswert scheint zu sein, daß für andere thixotrope Materialien^{5,7}, die im Bereich der Frequenzen f_0 zwischen 1 bis 10 c/s und der Amplituden a_0 zwischen 0,1 bis 0,4 cm getestet wurden, für W_0 Zahlenwerte resultieren, die sich zwischen einem Hundertstel bis zu dem Hundertfachen der Werte bewegen, die sich aus den Berechnungen nach (36) bzw. (40) ergeben; der Charakter der Daten ist aber dem auf der Abb. 6 festgehaltenen Ergebnissen ähnlich.

VERZEICHNIS DER SYMBOLE

$A \equiv \tau_w/\tau_1$	Parameter
a_0	Amplitude der Vibrationen
$B \equiv \Omega/D_1$	Parameter
D	zweite Invariante des Deformationsgeschwindigkeitstensors
$D_1 \equiv \tau_1/\eta_1$	Parameter
$D_0 \equiv (T_0/K)^m$	Parameter
D_V	maximale Schergeschwindigkeit der Vibrationen
$E \equiv W_0/(\tau_1 D_1)$	dimensionslose Dissipation
f	Frequenz der Vibrationen, Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit

h	Breite des Schlitzes, Gl. (37)
K	Konsistenzkoeffizient des Potenzmodells, Stoffkonstante
L	Länge des Zylinders
M	dimensionslose Stofffunktion
$m \equiv 1/n$	
n	dimensionsloser Fließindex des Potenzmodells, Stoffkonstante
$P \equiv \tau_w/T_0$	Parameter
r	Radialkoordinate
R	Halbmesser des inneren Zylinders
R/\varkappa	Halbmesser des äußeren Zylinders
T	Parameter, mit der Dimension einer Spannung
T_0	Dissipationsparameter, mit der Dimension einer Spannung
W	Intensität der Gesamtdissipation der mechanischen Energie
W_0	konstante Dissipation durch hydrodynamisches Rauschen, fundamentaler Parameter des Modells
X	dimensionslose Schergeschwindigkeit, Gl. (31)
Y	dimensionslose Scherspannung, Gl. (32)
$y(m, \varkappa)$	durch die Gl. (35) definierte Funktion
$\eta = \tau/D$	scheinbare Viskosität
$\eta_w, \eta_v, \eta_\tau$	Stofffunktionen
η_1	Stoffkonstante
$\vartheta^* = \tau/\tau_1$	dimensionslose Spannung
ϑ	dimensionlose Spannung für das Potenzmodell
$\Theta^* \equiv T/\tau_1$	Parameter
$\Theta \equiv T/T_0$	Parameter
\varkappa	geometrischer Simplex, ($\varkappa < 1$)
$\nu^* \equiv D/D_1$	Parameter
$\nu \equiv D/D_0$	Parameter
τ	zweite Invariante des Spannungstensors
τ_1	Stoffkonstante
τ_w	Schubspannung auf dem inneren Zylinder ($r = R$)
τ_0	s. Abb. 5
ω	Winkelgeschwindigkeit in der Flüssigkeit
Ω	Winkelgeschwindigkeit des inneren Zylinders
Ω_0	s. Abb. 5
$\Omega^* \equiv \Omega/D_0$	

Materialfunktionen und Materialfunktionale sind durch eckige Klammern gekennzeichnet.

Untere Indexe

- 2 für den äußeren Zylinder, $r = R/\varkappa$
 w für den inneren Zylinder, $r = R$

LITERATUR

1. Wein O., Wichterle K., Mitschka P.: diese Zeitschrift 38, 2874 (1973).
2. Wein O., Mitschka P., Wichterle K.: diese Zeitschrift 39, 2380 (1974).
3. Coleman B. D., Markowitz H., Noll W.: *The Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids*. Springer, Berlin 1966.

4. Wein O., Mitschka P., Ulbrecht J.: diese Zeitschrift 37, 1106 (1972).
5. Wein O.: Int. Chem. Eng. 13, 126 (1973); Chem. průmysl 22, 429 (1973).
6. Wein O., Wichterle K.: *Reologie koncentrovaných suspenzí* II. Forschungsbericht Nr. 14. Institut für theoretische Grundlagen der chemischen Technik, Tschechoslowakische Akademie der Wissenschaften, Prag 1971.
7. Wein O., Mitschka P., Wichterle K.: *Reologie koncentrovaných suspenzí* IV. Forschungsbericht Nr. 35. Institut für theoretische Grundlagen der chemischen Technik, Tschechoslowakische Akademie der Wissenschaften, Prag 1973.

Übersetzt vom Autor (P. M.).